PRODUIT SCALAIRE

1. : Dire si chacune des applications suivantes est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) =$	symétrique ?	bilinéaire ?	$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$	positif ?	défini ?
xx'					
$xx' - yy'$					
$2xx' + yy' - xy' - x'y$					
$xy' + yx'$					
$(xx' + yy')^2$					

Idem pour $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = 2(xx' + yy' + zz') + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'$ sur $\mathbb{R}^3$.

2. :

   (a) Montrer que dans un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit-scalaire :

$$\|\overrightarrow{x}\| = \|\overrightarrow{y}\| \Leftrightarrow (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \perp (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \text{ et } \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

   (b) En déduire des CNS de géométrie :
      i. Un parallélogramme ABCD est un losange ssi
      ii. Un parallélogramme ABCD est un rectangle ssi
      iii. Un triangle ABC est isocèle en A ssi
      iv. Un triangle ABC est rectangle en A ssi

3. * : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\| \, . \, \|$. On suppose que cette norme vérifie l'égalité du parallélogramme, à savoir :

$$\forall x, y \in \mathbb{E} \quad \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|x - \overrightarrow{y}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2\right)$$

   On se propose de démontrer que cette norme est euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(\, . \mid . \,)$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \ \|\overrightarrow{x}\|^2 = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x})$.

   (a) Montrer que si $(\, . \mid . \,)$ existe alors

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{E} \quad (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \left\| \frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}}{2} \right\|^2$$

   Cette formule définit une aplication de $\mathbb{E}^2$ vers $\mathbb{R}$; reste à montrer que c'est bien un produit scalaire.

   (b) Montrer que $(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \mid \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x_1} \mid \overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{x_2} \mid \overrightarrow{y})$ (indication : $\|(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) - \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x_1} + (\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{y})\|$)

   (c) Pour $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ fixés, on pose $f(\alpha) = (\alpha \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$. Vérifier que

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \ \ f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$$

   et que f est continue.

   (d) Conclure, en utilisant un résultat sur les fonctions continues.

CAUCHY-SCHWARZ

4. :

   (a) Prouver : $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$
   A quelle CNS a-t'on égalité ?
   Redémontrer cette inégalité en utilisant l'inégalité de convexité.

(b) Prouver : $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geqslant n^2$. Cas d'égalité ?

(c) Prouver :

$$(\alpha) \quad : \quad \forall n \geqslant 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$(\beta) \quad : \quad \forall n \geqslant 2 \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geqslant \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2$$

5. Soit $\mathbb{E} = \{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \ / \ \forall x \in [0,1] \quad f(x) \neq 0 \}$. Pour $f \in \mathbb{E}$, on pose : $P(f) = \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$.

(a) Montrer que $\min\limits_{f \in \mathbb{E}} P(f) = 1$; déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{E}$ pour lesquelles $P(f) = 1$.

(b) Montrer que $\sup\limits_{f \in \mathbb{E}} P(f) = +\infty$.

6. Montrer que pour $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant \sqrt{x-1}$ (prendre $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$). En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

7. Propriétés du produit scalaire usuel dans $M_n(\mathbb{R})$.

(a) (Re)démontrer que $(A \mid B) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $|tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|$; indication : $tr(A) = (I_n \mid A)$.

(c) Montrer que $(A \mid B) = ({}^tA \mid {}^tB)$, que $(AB \mid C) = (B \mid {}^tAC) = (A \mid C\,{}^tB)$, et que $\|AB\|^2 = ({}^tAA \mid B{}^tB)$.

(d) * Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

8. Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes $\geqslant 0$; on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ et $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k}$.

(a) Montrer que si les suites (s_n) et (t_n) sont convergentes, vers s et t respectivement, la suite (u_n) également, et $\lim u_n \leqslant \sqrt{st}$.

(b) Calculer $s, t, \sqrt{st}$ et $\lim u_n$ dans le cas où $a_k = a^k$ et $b_k = b^k$, avec $a, b \in]0, 1[$.

9. * : La *moyenne* de $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ est

$$M(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_i = m$$

la *variance* de X est

$$V(X) = M\left((X - \overline{X})^2 \right) \text{ où } \overline{X} = (m, ..., m)$$

,l'*écart-type* est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

et la *covariance* de X et $Y = (y_i)$ est

$$Cov(X, Y) = M\left((X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) \right)$$

(ici, le produit de deux élément de $\mathbb{R}^n$ se fait coordonnées par coordonnées).

(a) Montrer que $Cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$.

(b) Montrer que $(X, Y) \mapsto Cov(X, Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$, non "définie" sur $\mathbb{R}^n$ mais "définie" sur le sev des listes de somme nulle.

(c) Montrer que la covariance est en valeur absolue inférieure ou égale au produit des écart-types :

$$|Cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y))$$

.

ORTHOGONALITÉ

10. : Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) ; $\overrightarrow{x}$ est un vecteur inconnu mais on connait pour tout $\overrightarrow{y}$ le scalaire $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$. Ceci permet-il de retrouver le vecteur $\overrightarrow{x}$?

11. : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ espace euclidien ;

    (a) Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$; en déduire que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

    (b) * Soit E l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel donné dans le cours ;
    soit $c \in]a,b[$ et $F = \{f \in E \ / \ f$ est nulle sur $[a,c]\}$,
    et $G = \{f \in E \ / \ f$ est nulle sur $[c,b]\}$.
    Montrer que $F^{\perp} = G, G^{\perp} = F$, $(F \cap G)^{\perp} = E$, et que donc : $(F \cap G)^{\perp} \neq F^{\perp} + G^{\perp}$.

12. : Déterminer une base orthonormale pour le produits scalaires rencontré dans l'exercice 1 : $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) =$ $2(xx' + yy' + zz') + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'$ sur $\mathbb{R}^3$.

    (a) Méthode 1 : procéde de Schmidt sur la base canonique ; on trouve: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

    (b) Méthode 2 : remarquer que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = XX' + YY' + ZZ'$ avec $X = y + z$ etc..
    On trouve $\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

13. : Calculer le produit scalaire $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right)$ sachant que la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est orthonormée.

14. : Soit $\mathbb{E} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f$ est périodique de période $2\pi\}$.

    (a) Vérifier que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

    (b) Montrer que l'application : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \end{array} \right.$ est un produit scalaire dans $\mathbb{E}$.

    (c) Montrer que la famille $\mathcal{F}_n = (x \mapsto \cos kx)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale. La rendre orthonormale (attention au cas $k = 0$ qui est à part).

    (d) Qu'en déduit-on pour la famille $\mathcal{F}_n$?

15. : Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx$.

    (a) Montrer que $(. | .)$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.

    (b) Déterminer $\left(X^k \middle| X^l \right)$ et remplir le tableau

$(. \| .)$	1	X	X^2
1			
X			
X^2			

    .

    (c) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
    Réponse : $(1, \sqrt{3}X, \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2 - 1))$.

16. : Soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, .., \overrightarrow{e}_n)$ une base de $\mathbb{E}$, espace euclidien, et $\left(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, .., \overrightarrow{f}_n\right)$ la base orthogonale obtenue à partir de $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, .., \overrightarrow{e}_n)$ par le procédé de Schmidt, et $\overrightarrow{g}_k = \dfrac{\overrightarrow{f}_k}{\left\|\overrightarrow{f}_k\right\|}$;
montrer que $\overrightarrow{f}_k = \overrightarrow{e}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (\overrightarrow{e}_k \mid \overrightarrow{g}_i)\, \overrightarrow{g}_i$; en déduire que $\overrightarrow{f}_k = p_k(\overrightarrow{e}_k)$ où p_k est la projection orthogonale sur $(Vect(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, .., \overrightarrow{e}_{k-1}))^{\perp}$.

17. On dit que deux sev F et G sont faiblement orthogonaux s'il existe 3 sev deux à deux orthogonaux H, F', G' tels que $F = H \oplus F'$ et $G = H \oplus G'$

  (a) Montrer que deux sev sont faiblement orthogonaux ssi leurs orthogonaux le sont aussi.

  (b) Montrer que les sev engendrés par deux sous-familles d'une famille orthogonale sont faiblement orthogonaux.

18. Somme directe orthogonale, même en dimension infinie.

  Soit E un espace muni d'un produit scalaire, F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

  Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ (utiliser une base orthonormée de F) ; attention, ceci peut être faux si F est de dimension infinie.

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

19. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien, A sa matrice dans une base orthonormée ; montrer que

$$\left(\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \quad (\vec{x} \mid f(\vec{y})) = (f(\overrightarrow{x}) \mid \vec{y})\ \right) \Leftrightarrow A \text{ est symétrique}$$

20. Soit p un projecteur de $\mathbb{E}$ espace euclidien de base F et de direction G.

  (a) Montrer que p est une projection orthogonale (c'est-à-dire $F \perp G$) ssi $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{E}\ \ (\overrightarrow{x} \mid p(\overrightarrow{y})) = (p(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y})$. En déduire que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de projection orthogonale dans une base orthonormée ssi $A^2 = A$ et A est symétrique (cf. ex 18).

  (b) * Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\ \ (\overrightarrow{x} \mid p(\overrightarrow{x})) \geqslant 0$.

  (c) * Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\quad \|p(\overrightarrow{x})\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\|$.
  1ère méthode : pour $\overrightarrow{x}$ dans F et $\overrightarrow{y}$ dans G, écrire que $\|p(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y})\|^2 \leqslant \|\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}\|^2$ et conclure.
  2ème méthode : prendre $\overrightarrow{x}$ dans $G^{\perp}$ montrer que $\|p(\overrightarrow{x})\|^2 = \|p(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{x}\|^2$ et conclure.

21. :

  (a) Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Montrer que s est une symétrie orthogonale ssi deux quelconques des trois conditions suivantes sont réalisées :

    i. $s^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$

    ii. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{E}\ \ (\overrightarrow{x} \mid s(\overrightarrow{y})) = (s(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y})$

    iii. $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\quad \|s(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$

  (b) En déduire que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de symétrie orthogonale dans une base orthonormée ssi $A^2 = I_n$ et A est symétrique (cf. ex. 18).

22. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ avec $\mathbb{E}$ espace euclidien muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On note $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

  (a) Montrer que

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{E} \quad f(\overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{x}}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{E}\ \ (f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(\overrightarrow{x} \mid f(\overrightarrow{y}))}_{(1')}$$

  (b) En déduire que f vérifie (1) si et seulement si A est antisymétrique.

  (c) Montrer que *en dimension 3*, f vérifie (1) si et seulement s'il existe $\overrightarrow{a}$ telle que pour tout $\overrightarrow{u}$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$.

  (d) Montrer que parmi les trois propriétés suivantes, deux d'entre elles impliquent toujours la troisième :

    i. $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\ \ f(\overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{x}$

    ii. $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\quad \|f(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ (autrement dit f est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{E}$).

iii. $f^2 = -\operatorname{id}_{\mathbb{E}}$

Indication : pour i. et ii. ⇒iii. utiliser $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right\|^2 = 0$; pour ii. et iii. ⇒i. écrire $\left(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \right) = \left(f(\overrightarrow{x}) \mid -f^2(\overrightarrow{x}) \right)$; pour i. et iii. implique ii., écrire $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \left(\overrightarrow{x} \mid -f^2(\overrightarrow{x}) \right)$.
Un tel endomorphisme s'appelle une isométrie antisymétrique.

(e) Donner des exemples d'isométrie antisymétrique en dimension 2, 3 ou 4, si c'est possible.

(f) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une isométrie antisymétrique dans $\mathbb{E}$.

(g) On suppose que f vérifie iii. ; on pose $\left(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \right)' = \left(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \right) + \left(f(\overrightarrow{x}) \mid f(\overrightarrow{y}) \right)$. Montrer que $(. \mid .)'$ est un produit scalaire, et que f est une isométrie antisymétrique pour ce produit scalaire.

23. : Transposée d'une application linéaire pour un produit scalaire.
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels euclidiens.

(a) f est une application de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, et g une application de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{E}$. Montrer que si

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\ \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{F} \quad \left(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y} \right) = \left(\overrightarrow{x} \mid g(\overrightarrow{y}) \right)$$

alors f et g sont linéaires.
Indication : calculer $\left(f(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) - \lambda f(\overrightarrow{y}) \mid \overrightarrow{z} \right)$.

(b) Montrer que si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que

$$\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \quad \varphi(\overrightarrow{x}) = \left(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{x} \right)$$

(petit théorème de Riesz).

(c) Montrer que si f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, il existe une unique application g de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{E}$ vérifiant

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\ \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{F} \quad \left(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y} \right) = \left(\overrightarrow{x} \mid g(\overrightarrow{y}) \right)$$

Indication : pour $\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}$ fixé, considérer la forme linéaire $\overrightarrow{x} \mapsto \left(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y} \right)$.
Déduire du (a) la linéarité de g ; montrer que les matrices de f et g dans des bases orthonormées de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$ sont transposées l'une de l'autre.
g est appelée la transposée de f.

24. :

(a) Rappeler comment est défini le produit scalaire usuel dans $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'application $A \mapsto {}^tA$ est une symétrie orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

25. : Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$; on appelle p la projection orthogonale sur la droite $D = \operatorname{vect}(\overrightarrow{n})$ et s la réflexion de base $\overrightarrow{n}^{\perp}$.

(a) Rappeler la formule pour $p(\overrightarrow{x})$ utilisant le produit scalaire.

(b) Donner la matrice de p dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans le cas où $\dim \mathbb{E} = 3$, et où $\overrightarrow{n} \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right._{/\mathcal{B}}$.

(c) En déduire, toujours dans ce cas, la matrice de la réflexion s dans $\mathcal{B}$.

(d) * Revenant au cas général, montrer que si N est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{n}$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, X celle de $\overrightarrow{x}$ et Y celle de $p(\overrightarrow{x})$, alors $Y = N^tNX$; en déduire $P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $S = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(s)$; expliquer alors comment a été fabriqué l'exercice 7 a) sur les matrices.

26. * : On considère $E = \left\{ f \in C^2([a,b], \mathbb{R}) \ / \ f(a) = f(b) = 0 \right\}$.

(a) Vérifier que E est un espace vectoriel ; on le munit du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_a^b fg$

(b) Montrer que la dérivation D est un endomorphisme antisymétrique de E, c'est-à dire que pour tout $f, g \in E$

$$(\ D(f)\ \mid g\ ) = -(\ f\ \mid D(g)\ )$$

que dire de D^2 ?

(c) En déduire que $\ker\left(D^2 - \lambda id_E\right)$ et $\ker\left(D^2 - \mu id_E\right)$ sont orthogonaux pour $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}^*$.

(d) On prend $a = 0$ et $b = \pi$; déterminer $\ker\left(D^2 - \lambda id_E\right)$ suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

AUTOMORPHISMES ET MATRICES ORTHOGONAUX

27. : Les endomorphismes non nuls conservant l'orthogonalité sont les similitudes.

Soit f un endomorphisme *non nul* d'un espace euclidien.

On dit que f est une similitude s'il existe $k \neq 0$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in E\ \|f(\overrightarrow{x})\| = k\|\overrightarrow{x}\|$ (autrement dit, f est k fois une isométrie) ; on veut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante est que f conserve l'orthogonalité (c'est à dire $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) \perp (\overrightarrow{y})$).

(a) Condition sufisante : supposons que f conserve l'orthogonalité.

i. Montrer que f conserve l'égalité des normes , c'est-à-dire que si deux vecteurs ont la même norme, leurs images également (cf. exercice 2.)

ii. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\overrightarrow{x_0}$ avec $k = \|f(\overrightarrow{x_0})\| \neq 0$

iii. Montrer que f est une similitude.

28. Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien $\mathbb{E}$; rappelons que $Inv(f) = \ker(f - id)$ et $Inv^-(f) = \ker(f + id)$;

montrer que $(Inv(f))^\perp = \operatorname{Im}(f - id)$ et que $Inv^-(f)$ en est un sev.

29. : Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$. On pose $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \lambda(\ \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{n}\ )\ \overrightarrow{n}$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit une isométrie vectorielle.

(b) Interpréter géométriquement l'application f dans ce cas, ainsi que $-f$.

30. : Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$, $s_{\overrightarrow{n}}$ la réflexion par rapport à $\overrightarrow{n}^\perp$ et f une isométrie quelconque ; montrer que $f \circ s_{\overrightarrow{n}} = s_{f(\overrightarrow{n})} \circ f$ (utiliser l'expression trouvée dans l'exercice précédent).